

文章编号 1004-924X(2008)08-1423-06

基于多目标优化的空间直线度误差评定

岳武陵, 吴 勇

(南通大学 机械工程学院, 江苏 南通 226007)

摘要: 为了实现对空间直线度误差的精确、快速评定, 研究了它的数学模型和逐次二次规划(SQP)算法。根据最小区域定义及数学规划理论, 建立了空间直线度评定的非线性规划模型, 指出了该模型实质上是多目标优化的问题, 并将该优化问题转化成单目标优化问题。由于该非线性规划模型还是凸的、二次的, 因此提出了用 SQP 法来实施。SQP 法在评定过程中保留了模型中的非线性信息, 对初始参数的要求低, 且稳定、可靠、效率高。几个算例的结果均满足凸规划全局最优判别准则, 精度达到 10^{-3} mm, 耗时在 0.4 s 左右。结果有力地验证了上述结论。

关键词: 计量学; 空间直线度; 误差评定; 最小区域; 多目标优化; 逐次二次规划法

中图分类号: TB92 **文献标识码:** A

Evaluation of spatial straightness errors based on multi-target optimization

YUE Wu-ling, WU Yong

(College of Mechanical Engineering, Nantong University, Nantong 226007, China)

Abstract: In order to realize accurate and fast evaluation for spatial straightness, its mathematical model and Successive Quadratic Programming(SQP) algorithm were investigated. Based on the condition of minimum zone method, a nonlinear programming model was established for spatial straightness error evaluation. This nonlinear model was further proved to be a multi-target optimization problem in essence, and could be transformed into a single-target optimization problem. A unified and efficient SQP algorithm was proposed to solve the model. As the nonlinear programming model is convex and SQP algorithm can retain such nonlinear information, the algorithm has very loose requirements for initial parameters and shows its stable, reliable and highly efficient in optimization. Several experiments of spatial straightness error evaluation were carried out, the results can meet the requirements for convex programming's global optimization very well, the precision is 10^{-3} mm and consumed time is about 0.4 s, which has proved the above mentioned conclusion.

Key words: metrology; spatial straightness; error evaluation; minimum zone; multi-target optimization; Successive Quadratic Programming(SQP) algorithm

1 引言

直线度误差是指实际直线对其理想直线的变动量。直线度误差可分为给定平面内的直线度误差、给定方向内的直线度误差以及空间直线度误差。目前,给定平面内的直线度误差和给定方向内的直线度误差的评定技术已较为成熟,而实际上,大多数直线是空间直线,对直线度误差的评定应在三维空间里进行分析,但人们对于空间直线度误差的研究仍处于探索阶段^[1-10]。文献[1]提出了用最小平行六面体包围的方法计算空间直线度误差,但只能提供误差计算的近似值。文献[2-3]建立了在穷举法基础上的解非线性方程组的方法,此法不仅效率低而且不能求解退化情况的空间直线度误差。文献[4-5]建立了极大极小化模型,用优化的方法计算空间直线度误差,但是对此非线性优化问题借助线性优化或线性化的优化方法解决,其精度或效率不理想。文献[6-7]提出了基于遗传算法(Genetic Algorithms, GA)的空间直线度误差评定的方法。遗传算法虽然能够解决传统算法存在的不足,但是其计算结果与变量初始变化范围的选取及其算法的参数选择有很大关系,算法的鲁棒性欠佳^[8]。近来也有学者提出了改进遗传算法^[9]、基于粒子群算法^[10]等评定空间直线度误差方法。

本文指出,根据最小区域条件评定空间直线度误差,本质上是多目标优化的极大极小问题,并将其转化为通常的单目标规划问题,然后采用逐次二次规划法(SQP)求解。这一单目标规划问题以统一的方式处理了通常情况和退化情况的直线度评定。而且,SQP法在求解中能保留非线性的信息,对初始参数的要求低,且稳定、可靠、优化效率高。

2 数学模型

设测量基准为 z 轴,被测空间直线的测点以坐标 (r, θ, z) 给出。 r, θ 为测量点到测量基准的实际偏差, z 表示测点的位置高度。空间直线度误差的最小包容圆柱以“倾斜圆柱”表示,如图 1 所示,它的轴线为 O_1O_2 ,亦即理想直线。在 $z=0$ 平面内,轴线 O_1O_2 过点 $O_1(x_0, y_0)$ 。轴线 O_1O_2 在

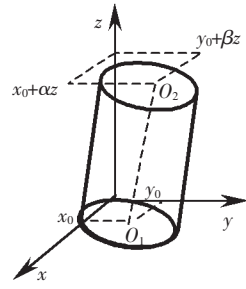


图 1 评定模型示意图

Fig. 1 Model of evaluation

XOZ 平面上与 z 轴的夹角为 α ,在 YOZ 平面上与 Z 轴的夹角为 β 。由于在精密测量中 (x_0, y_0, a, b) 值很小,故有 $\tan \alpha = \alpha, \tan \beta = \beta$ 。测点 P 到轴线(理想直线) O_1O_2 的距离(即理想偏差值)为 R :

$$R = \sqrt{(r \cos \theta - x_0 - \alpha z)^2 + (r \sin \theta - y_0 - \beta z)^2}. \quad (1)$$

R 是两组变量 (r, θ, z) 和 $(x_0, y_0, \alpha, \beta)$ 的函数。 (r, θ, z) 表示测量点的坐标,用 \mathbf{v} 表示。 $(x_0, y_0, \alpha, \beta)$ 描述理想直线 O_1O_2 的位置和方向,用 \mathbf{u} 表示。那么式(1)可表示为:

$$R = R(r, \theta, z; x_0, y_0, \alpha, \beta) = R(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \quad (2)$$

测点 P 到理想直线的最大距离即最大理想偏差值,它表示外包容圆柱的半径,记为 $\bar{R}(\mathbf{u})$:

$$\bar{R}(\mathbf{u}) = \max\{R(\mathbf{v}, \mathbf{u}); \mathbf{v} \in V\} = \max\{R_1, R_2, R_3, \dots, R_n\}, \quad (3)$$

式中, V 为形成变量(测点) \mathbf{v} 的集合, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, n 为测点数。

按最小条件评定空间直线度误差,实质上是寻找 $\mathbf{v} = (r, \theta, z)^T, \mathbf{u} = (x_0, y_0, \alpha, \beta)^T$ 之值,使最大理想偏差值 $\bar{R}(\mathbf{u})$ 取得最小值,即是一个极大值极小化的问题:

$$\min \bar{R}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \mathbf{u} \in E^4, \quad (4)$$

空间直线度误差为 :

$$f = 2[\min \bar{R}(\mathbf{v}, \mathbf{u})]. \quad (5)$$

式(4)所涉及的极大极小问题实质是多目标优化的问题。多目标优化和单目标优化的本质区别在于:在很多情况下各个子目标有可能是相互冲突的,一个子目标的改善有可能引起另一个子目标性能的降低。也就是说,要同时使得所有子目标达到最优值是不可能的,而只能是在它们中间进行协调和折中处理,使各个子目标函数都尽可能地达到最优。

评定空间直线度误差时,每一个测点形成一个子目标,使子目标达到最优值的测点在包容圆柱面上,称它们为有效测点。当有效测点是 5 个时,由式(1)可知,轴线参数可由它们唯一确定:

$$\begin{cases} (r_1 \cos \theta_1 - x_0 - \alpha z_1)^2 + (r_1 \sin \theta_1 - y_0 - \beta z_1)^2 = R^2 \\ (r_2 \cos \theta_2 - x_0 - \alpha z_2)^2 + (r_2 \sin \theta_2 - y_0 - \beta z_2)^2 = R^2 \\ (r_3 \cos \theta_3 - x_0 - \alpha z_3)^2 + (r_3 \sin \theta_3 - y_0 - \beta z_3)^2 = R^2 \\ (r_4 \cos \theta_4 - x_0 - \alpha z_4)^2 + (r_4 \sin \theta_4 - y_0 - \beta z_4)^2 = R^2 \\ (r_5 \cos \theta_5 - x_0 - \alpha z_5)^2 + (r_5 \sin \theta_5 - y_0 - \beta z_5)^2 = R^2 \end{cases} \quad (6)$$

称有 5 个有效测点的情况为通常情况。而只有 3 个或 4 个有效测点时,式(6)减少到只有 3 个或 4 个方程,轴线参数不可以由它们唯一确定,即可能有许许多多甚至无数直径不同的圆柱,称这种情况为退化情况。但不管是通常情况还是退化情况,甚至不管是包容圆柱还是一般包容圆柱,包容圆柱都只与测点中的有效测点有关,而和它的测点无关。

结论 1:包容圆柱的方位和半径只和有效测点有关,而和其它测点无关。

$R(\mathbf{v}; \mathbf{u})$ 是 \mathbf{u} 的非线性函数。设 $S \subseteq E^4$ 是非空开集。可证明对于每一点 $\mathbf{u} \in S, R(\mathbf{v}; \mathbf{u})$ 在 \mathbf{u} 处的 Hessian 矩阵在 E^4 中都是半正定的,所以 $R(\mathbf{v}; \mathbf{u})$ 是 \mathbf{u} 的偏凸函数, $\bar{R}(\mathbf{u})$ 是凸函数。利用“凸函数 $f(x)$ 在开域某点取得全局极小的充要条件是 $0 \in f(x)$ ”的性质构成最小条件的代数判别式:

$$\begin{cases} \sum \lambda_i \xi_i = 0, \lambda_i > 0, \text{且} \sum \lambda_i = 1 \\ \xi_i = \{\cos \bar{\theta}_i, \sin \bar{\theta}_i, z_i \cos \bar{\theta}_i, z_i \sin \bar{\theta}_i\}^T \\ (\epsilon = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \quad (7)$$

式中,

$$\cos \bar{\theta}_i = \frac{r_i \cos \theta_i - x_0 - \alpha z_i}{R}, \sin \bar{\theta}_i = \frac{r_i \sin \theta_i - y_0 - \beta z_i}{R},$$

m 是有效测点的点数, λ_i 称检验数。

式(7)同时适用于通常情况和退化情况。

结论 2:由满足式(7)条件的有效测点确定的包容圆柱是满足最小条件的包容圆柱,由此得到的空间直线度误差是唯一满足最小条件的准确结果。

3 计算机判别方法

将式(4)描述的极大极小问题通过变量 $\bar{r}(\mathbf{u})$ 和 $c_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{u})$ 转化为通常的单目标规划问题^[11]:

$$\begin{aligned} & \min \bar{r}(\mathbf{u}) \\ \text{s. t. } & c_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{u}) = R_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{u}) - \bar{r}(\mathbf{u}) \leq 0, \quad (8) \\ & \mathbf{u} \in E^4 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

这是凸规划,它的解 \mathbf{u}^* 是全局最优解的充要条件是存在向量 $\mathbf{u} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$ 满足:

$$\begin{aligned} & \nabla \bar{r}(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^m \mu_i c_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{u}) = 0, \quad (9) \\ & \mu_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

根据拉格朗日函数的定义:

$$L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) = \bar{r}(\mathbf{u}) + \sum \mu_i c_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{u}). \quad (10)$$

式(8)和式(9)是拉格朗日函数的稳定点。本文采用逐次二次规划(SQP)法解此问题,其基本思想^[12]是:

形成基于上述拉格朗日函数一个二次规划子问题,在迭代点 $\mathbf{u}^{(k)}$ 处以这个子问题的解 $\mathbf{d}^{(k)}$ 作为迭代的搜索方向,并按照迭代格式:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}, \quad (11)$$

确定步长,得到新点 $\mathbf{u}^{(k+1)}$,使一系列的 $\mathbf{u}^{(k)}$ ($K = 0, 1, \dots$) 最终逼近原约束优化问题的最优解。SQP 法主要有以下三方面内容。

3.1 形成和求解二次规划子问题

计算初始点或当前点的目标函数、约束函数及其导数的值,形成二次规划子问题:

$$\begin{aligned} & \min \left[\frac{1}{2} (\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} + \nabla \bar{r}(\mathbf{u}^{(k)})^T \mathbf{d}^{(k)} \right] \\ \text{s. t. } & [\nabla c_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{u}^{(k)})^T \mathbf{d}^{(k)}] + c_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{u}^{(k)}) \leq 0, \quad (12) \\ & (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

只要 $\mathbf{H}^{(k)}$ 是正定对称矩阵,式(12)仍是凸规划,其有全局最优解的条件为:

$$\begin{cases} \nabla \bar{r}(\mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla c_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{u}^{(k)}) = 0 \\ \nabla c_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{u}^{(k)}) + \nabla c_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{u}^{(k)})^T \mathbf{d} \leq 0, \mu_i \geq 0 \\ \mu_i \{ \nabla c_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{u}^{(k)}) + \nabla c_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{u}^{(k)})^T \mathbf{d} \} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \quad (13)$$

设由式(13)得到 $(\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)})$,若 $\mathbf{d}^{(k)} = 0, \mathbf{u}^{(k)}$ 就是式(9)的全局最优解,结束迭代。若 $\mathbf{d}^{(k)} \neq 0, \mathbf{d}^{(k)}$ 可作为搜索方向。

3.2 步长确定

用迭代公式(11)确定步长的原则是既要使目标函数减小又要满足约束条件,本文采取试凑法。首先令 $\alpha^{(k)} = 1$,代入式(11),若:

$$\bar{r}(\mathbf{u}^{(k+1)}) < \bar{r}(\mathbf{u}^{(k)}), \quad (14)$$

则 $\alpha^{(K)} = 1$, 否则令 $\alpha^{(K)} = 0.8, 0.6, \dots$, 直到不等式(14)成立为止。

3.3 Hessian 阵修正

$\mathbf{H}^{(K)}$ 是 Lagrange 函数式(10)的的导数矩阵(Hessian 阵)。直接计算它有困难, 因而采用变尺度法逐渐形成 $\mathbf{H}^{(K)}$ 。具体做法是: 先用一对称正定矩阵 $\mathbf{A}^{(K)}$ 近似代替 $\mathbf{H}^{(K)}$, 然后在迭代过程中不断修正, 以逼近 $\mathbf{H}^{(K)}$ 。其校正公式为:

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{(k)} + \Delta\mathbf{A}^{(k)}, \quad (15)$$

其中 $\Delta\mathbf{A}^{(k)}$ 为修正矩阵, 要使 $\mathbf{A}^{(k+1)}$ 在修正过程中具有对称性和正定性, 必须保证 $\Delta\mathbf{A}^{(k)}$ 和 $\mathbf{A}^{(k)}$ 是对称、正定的。为此取, $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{I}$,

$$\Delta\mathbf{A}^{(k)} = \frac{\mathbf{q}^{(k)}(\mathbf{q}^{(k)})^T}{(\mathbf{q}^{(k)})^T \mathbf{t}^{(k)}} - \frac{\mathbf{A}^{(k)} \mathbf{t}^{(k)} (\mathbf{A}^{(k)} \mathbf{t}^{(k)})^T}{(\mathbf{t}^{(k)})^T \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{t}^{(k)}}, \quad (16)$$

其中:

$$\mathbf{t}^{(k)} = \mathbf{u}^{(K+1)} - \mathbf{u}^{(K)},$$

$$\mathbf{q}^{(k)} = \nabla_{\mathbf{u}} L(\mathbf{u}^{(K+1)}, \boldsymbol{\mu}_i^{(K+1)}) - \nabla_{\mathbf{u}} L(\mathbf{u}^{(K)}, \boldsymbol{\mu}_i^{(K)}),$$

表 1 算例的来源和计算结果

Tab. 1 Example sources and computation results

算例	1	2	3	4	5	6
参考文献	[2]、[6]	[3]、[5]、[9]	[5]	[5]	[4]	[7]、[10]
半径(mm)	16.287	11.761	15.566	14.276	7.394	7.568
	-1.669 6	-4.6350	6.460 1	2.833 5	137.718 4	-49.414 7
轴线参数	10.692	-4.746 6	1.390 0	5.625 0	603.997 7	-24.212 7
x_0, y_0, α, β	0.032 5	0.191 7	0.025 1	0.075 7	6.147 3	2.970 6
	-0.314 3	0.056 2	-0.122 0	-0.082 6	-7.256 8	1.960 8
耗时(s)	0.391 0	0.485 1	0.391 0	0.469 0	0.906 0	1.359 0

表 2 算例计算结果的验证

Tab. 2 Validation of compute results

算例	(有效测点)及检验数 l				
1	(4) 0.356 2	(5) 0.3243	(6) 0.218 5	(10) 0.025 3	(11) 0.075 7
2	(1) 0.153 9	(3) 0.036 3	(4) 0.403 1	(6) 0.315 6	(7) 0.091 2
3	(1) 0.077 7	(2) 0.112 6	(7) 0.416 9	(10) 0.248 3	(12) 0.144 5
4	(1) 0.211 4	(4) 0.427 2	(6) 0.213 5	(8) 0.147 9	
5	(2) 0.150 0	(9) 0.500 0	(12) 0.350 0		
6	(13) 0.152 5	(9) 0.495 3	(7) 0.352 2		

直线的参数, 使得通常情况和退化情况得到统一的处理。如表 1 中, 算例 1~3 是有 5 个有效测点的通常情况, 算例 4~6 是有 4 个和 3 个有效测点

为保证 $(\mathbf{q}^{(k)})^T \mathbf{t}^{(k)} > 0$, 用 \mathbf{q}' 代替 $\mathbf{q}^{(k)}$:

$$\mathbf{q}' = \theta \mathbf{q}^{(k)} + (1 - \theta) \mathbf{t}^{(k)}, \quad (17)$$

其中:

$$\theta = \begin{cases} 1 & (\mathbf{q}^{(k)})^T \mathbf{t}^{(k)} \geq 0.2 (\mathbf{t}^{(k)})^T \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{t}^{(k)} \\ \frac{0.8 (\mathbf{t}^{(k)})^T \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{t}^{(k)}}{(\mathbf{t}^{(k)})^T \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{t}^{(k)} - (\mathbf{q}^{(k)})^T \mathbf{t}^{(k)}} & \text{其它} \end{cases}$$

可以证明, 当 $\mathbf{A}^{(K)}$ 正定时, 修正后的矩阵 $\mathbf{A}^{(K+1)}$ 具有确定解, 因为它是对称、正定矩阵, 这就为 SQP 法优化提供了可靠的保证。

4 算例及讨论

算例的测量数据见参考文献, 评定结果和耗时见表 1。表中 x_0, y_0 的单位是 μm , α, β 的单位是 10^{-3} rad。对结果的验证见表 2, 表 2 中有效测点及检验数栏中给出的是测量数据中测点的序号和由式(7)算出的 λ 值。

(1) 本算法避免了直接利用式(6)来确定理想

的退化情况, 用统一的算法获得评定结果。表中给出最小包容圆柱的半径(单位是 μm), 它的两倍即空间直线度误差。

(2) 本算法的核心是形成和求解二次规划问题。将本问题转化成式(8)后,目标函数和约束条件仍旧都是凸函数,属于凸规划问题,其局部最优解就是全局最优解。本文用式(7)对6个算例验证了这一结论(见表2),即本文找到的解是符合最小包容原理的最优解。

(3) 本文中6个算例都是以测量基准坐标系的 z 轴(即向量 $\{0,0,0,0\}$)作初始轴线参数的。无论从测量数据还是评定结果都可以看出算例5、6的 z 轴在最小包容圆柱外面,但是都得到正确结果。和例1~4的区别仅是耗时多些(见表1)。如果以首尾法或最小二乘法得到的理想直线为初始轴线参数,总的耗时仍可在0.4s左右。因此本算法很稳定,对初始参数的要求很低,耗时也很少。

(4) 关于本算法和其它文献结果差异(见表3)的分析。这些差异表明:

(a) 将非线性模型改为线性模型是不行的。

(b) 文献[2]给出的有效测点和本文一样,但是作为检验数的值(0.356 038,0.323 604,0.219 203,0.025 158,0.075 997)和本文只是接近,不完全一样。用文献[2]给出的理想直线的参数,很容易验证有效测点4、5、10在包容圆柱外面,且没有测点在包容柱面上。这些表明按文献[2]将非线性方程组在近似解处通过泰勒展开保留线性项后,用迭代法求得的收敛解,即使能得到正确的有效测点,其理想直线和直线度误差仍是近似的。

(c) 目前的遗传算法和粒子群算法等进化算法给出的只是直线度误差的收敛解并非一定是真正的全局最优解。因为这些方法终止搜索的标准是对目标函数有无改进,没有找到有效测点,不能验证他们的解是全局最优解。甚至有时收敛解给

出的包容圆柱也未必能包容所有测点,如文献[6]。由于文献[6]没有给出理想直线的参数,本文无法象对文献[2]那样,指出具体是哪几个点在包容圆柱外面。但本文的所有算例都验证了直线度的评定是凸函数(规划)的极值问题,有效测点都满足凸函数全局极值的判别准则,只有全局最优解才是唯一的真正的空间直线度误差,所以任何比本文更小的评定结果都是不能包容所有测点的。

表3 几种算法评定结果的比较

Tab. 3 Comparison of evaluation results for several algorithms

数据来源	线性化算法		迭代法			进化算法	
	[4]	[2]	[6]	[7]	[10]		
文献结果	22.7	16.285	13.37	13.0	12.466		
本文结果	7.394	16.287			7.568		

5 结 论

(1) 本算法不仅使得通常情况和退化情况得到统一的处理,而且能获得真正符合最小包容条件的空间直线度误差,精度达到 10^{-3} mm,且耗时在0.4s左右。

(2) 本算法对初始参数的要求很低、很稳定,耗时少。如果被测直线远远偏离基准坐标系的 z 轴,以至影响到直线度的评定(如果出现这种情况的话),用首尾法或最小二乘法一定可以给出非常满意的初始参数。

(3) 本算法可以推广应用到其它形状误差的评定中。

参考文献:

- [1] HUANG S T, FAN K C, WU J H. A new minimum zone method for evaluating straightness errors[J]. *Precision Engineering*, 1993, 15(3): 158-165.
- [2] 张青, 李柱. 空间直线度误差评定的计算机实现方法[J]. *计量技术*, 1998(1): 9-12.
ZHANG Q, LI ZH. Computer actualize of evaluation method for spatial straightness errors [J]. *Measurement Technique*, 1998(1): 9-12. (in Chinese)
- [3] 张青, 范光照, 徐振高, 等. 按最小条件评定空间直线度误差的理论研究[J]. *计量学报*, 1998, 19(4): 246-253.
ZHANG Q, FAN G ZH, XU ZH G, et al.. Theory research for spatial straightness error evaluation based on minimum zone condition[J]. *Acta Metrologica Sinica*, 1998, 19(4): 246-253. (in Chinese)
- [4] 侯宇. 空间直线度的评定 [J]. *计量技术*, 1994(3): 2-3.

- HOU Y. Evaluation of spatial straightness error [J]. *Measurement Technique*, 1994(3):2-3. (in Chinese)
- [5] 刘文文, 费业泰. 空间直线度包容评定的线性逼近算法[J]. 中国科技大学学报, 1999, 29 (2):242-247.
LIU W W, FEI Y T. A new algorithm for the minimum envelope evaluation of spatial straightness[J]. *J. China University of Science and Technology*, 1999, 29 (2):242-247. (in Chinese)
- [6] 粟时平, 李圣怡, 王贵林. 基于鞍点规划及遗传算法的空间直线度误差优化评定[J]. 长沙电力学院学报(自然科学版), 2001, 16(3):39-43.
SU SH P, LI SH Y, WANG G L. Optimization evaluation of spatial straightness error based on saddle point programming and genetic algorithm[J]. *J. Changsha University of Electric Power (Natural Science)*, 2001, 16(3):39-43. (in Chinese)
- [7] 廖平, 喻寿益. 基于遗传算法的空间直线度误差的求解[J]. 中南工业大学学报, 1998, 29(6):586-588.
LAO P, YU SH Y. A valuation method for spatial straightness errors based on genetic algorithm[J]. *J. Central South University of Technology*, 1998, 29(6):586-588. (in Chinese)
- [8] 刘永超, 陈明. 形位公差的进化算法[J]. 计量学报, 2001, 22(1):18-22.
LIU Y CH, CHEN M. A new evaluation method for form and position errors[J]. *Acta Metrologica Sinica*, 2001, 22(1):18-22. (in Chinese)
- [9] WEN X L, SON M. An improved genetic algorithm for planar and straightness error evaluation[J]. *International J. Machine Tools & Manufacture*, 2003, 43:1157-1162.
- [10] 茅健, 曹衍龙. 基于粒子群算法的空间直线度误差评定[J]. 工程设计学报, 2006, 13(5):291-294.
MAO J, CAO Y L. Evaluation method for spatial straightness errors based on particle swarm optimization[J]. *J. Engineering Design*, 2006, 13(5):291-294. (in Chinese)
- [11] 范五妹, 徐尔, 周汉良. 数学规划及其应用[M]. 北京:冶金工业出版社, 2003.
FAN W M, XU E, ZHOU H L. *Mathematics Programming and Applications*[M]. Beijing:Metallurgical Industry Press, 2003. (in Chinese)
- [12] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京:科学出版社, 1997.
YUAN Y X, SUN W Y. *Theory and Method of Optimization*[M]. Beijing:Science Press, 1997.

作者简介:岳武陵(1948-),女,浙江杭州人,副教授,研究方向为形位误差的测量和评定。E-mail: nt_wy053@yahoo.com.cn